MUSTERBEISPIELE
"Einführung in die mathematischen Methoden"

1. Man betrachte folgende Relation auf $\mathbb{Z}$: $xRy \quad \Leftrightarrow \quad x + y \geq 5$.
   Ist diese Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch ? (Man begründe eventuell durch Gegenbeispiele die Antworten)

2. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$. Eine Relation auf M sei definiert durch $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \quad \Leftrightarrow$ die Verbindungsstrecke zwischen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) liegt in M .
   Ist diese Relation reflexiv, symmetrisch, transitiv oder antisymmetrisch ?

3. Man zeige, dass $\{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ : \ b - a$ ist durch 5 teilbar$\}$ eine Äquivalenzrelation ist.

4. Gegeben sei die Funktion $f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$. Man bestimme das Bild $f(D_1)$ und das Urbild $f^{-1}(B_1)$ für $D_1 = [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ bzw. $B_1 = [0, \frac{1}{2}]$.

5. Man untersuche, ob die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$ injektiv ist.

6. Wie muß der Bildbereich der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$ eingeschränkt werden, damit man eine surjektive Funktion erhält.

7. Man beweise, dass das Produkt von zwei ungeraden Funktionen eine gerade Funktion ist, und das Produkt einer ungeraden mit einer geraden Funktion eine ungerade Funktion ist.

8. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

9. Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von $\frac{x^2}{x^4 - 1}$.

10. Für die komplexen Zahlen $z_1 = 3 + i$ und $z_2 = 2 - 4i$ bestimme man $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $|z_2|$ sowie die Polardarstellung von z_1 .

11. Man bestimme die vierten Wurzeln aus $z = i$.

12. Man bestimme die 1. Ableitung von
    - $f(x) = \frac{e^{x^2-1}}{x^2+4}$
    - $f(x) = (x^2 - x + 3)\sin^3 x$
    - $f(x) = \ln(x \ln x)$
    - $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$
13. Für die folgenden Funktionen führe man eine Kurvendiskussion durch.
    - $f(x) = x^3 - \frac{48}{x}$
    - $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$
    - $f(x) = x - 2\sqrt{x^2+1}$
    - $f(x) = \sqrt{x^3 - x}$
14. Man löse die folgenden Integrale
    - $\int x\sqrt{1+x}dx$
    - $\int a^x dx \quad (a \neq e)$
    - $\int x \arctan x dx$
    - $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}dx$
    - $\int \frac{x^3}{x^2+2x-3}dx$
    - $\int x^2 e^x dx$
    - $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx$
15. Man bestimme eine Parameterdarstellung jener Geraden in der Ebene, welche durch die Punkte $P(-1,2)$ und $Q(4,-1)$ geht. Danach gebe man eine parameterfreie Darstellung an.
16. Man weise durch direktes Ausrechnen nach, dass für zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ gilt :

    $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$
17. Man bestimme eine Parameterdarstellung jener Ebene im $\mathbb{R}^3$, welche durch die Punkte $P(1,2,3)$, $Q(-1,2,6)$ und $R(2,-2,3)$ geht. Danach gebe man eine parameterfreie Darstellung an.
18. Man zeige : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

19. Man beweise mittels vollständiger Induktion

- $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
- $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k!) = (n+1)! - 1$
- $\sum\limits_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad , \ 0 \leq m \leq n$
- $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n \quad , \ x_i \geq 0 \ \ \forall\, i$